

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 3875

**MODELIRANJE I STABILIZACIJA
DVOSTRUKOG OBRNUTOG NJIHALA**

Rafaela Vujević

Zagreb, lipanj 2015.

Zagreb, 5. ožujka 2015.

ZAVRŠNI ZADATAK br. 3875

Pristupnik: **Rafaela Vujević (0035192499)**
Studij: Elektrotehnika i informacijska tehnologija
Modul: Automatika


Zadatak: **Modeliranje i stabilizacija dvostrukog obrnutog njihala**

Opis zadatka:


Obrnuto dvostruko njihalo predstavlja složen nestabilan proces. Jedan od načina oporavljanja ovakvim procesom je da se obrnuto dvostruko njihalo stavi na kolica čijim pokretanjem se može ostvariti stabilizacija. U sklopu završnog rada potrebno je izvesti kontinuirani matematički model obrnutog njihala, te ga realizirati u MATLAB Simulinku. Potrebno je linearizirati sustav oko ravnotežne točke te analizirati stabilnost lineariziranog modela. Za linearizirani model, potrebno je implementirati regulator koji će stabilizirati sustav oko ravnotežne točke. Ujedno, potrebno je komentirati i simulacijom utvrditi za koje početne uvjete je stabilizacija moguća korištenjem razvijenog regulatora.

Zadatak uručen pristupniku: 13. ožujka 2015.
Rok za predaju rada: 12. lipnja 2015.

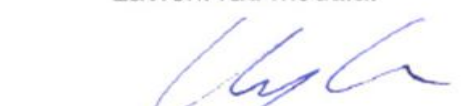
Mentor:


Doc. dr. sc. Nikola Mišković

Djelovođa:


Doc. dr. sc. Nikola Mišković

Predsjednik odbora za
završni rad modula:


Prof. dr. sc. Stjepan Bogdan

Sadržaj

Uvod	1
1. Matematičko modeliranje	2
2. Simulacija	6
3. Linearna aproksimacija	13
4. Stabilizacija i rezultati analize	16
4.1. Prikaz modela dvostrukog obrnutog njihala u prostoru stanja	16
4.2. Neizraziti regulator dvostrukog obrnutog njihala	17
Zaključak	23
Literatura	24
Sažetak	25
Summary	26

Popis kratica i simbola

Kratica ili oznaka simbola	Jedinica	Opis
F	N	Sila koja djeluje na sustav
θ_0	m	Pomak kolica
θ_1	rad	Kut prvog članka
θ_2	rad	Kut drugog članka
SIMO	-	Single input multiple output
y_{CM}	-	Y koordinata centra mase
L	-	Lagrangeova funkcija
m_0	kg	Masa kolica
m_1	kg	Masa prvog članka
m_2	kg	Masa drugog članka
g	m/s^2	Ubrzanje sile teže
l	m	Duljina
I	kgm^2	Moment tromosti
δ_0	$kg s^{-1}$	Koeficijent trenja
δ_1	$kgm^2 s^{-1}$	Koeficijent prigušenja
δ_2	$kgm^2 s^{-1}$	Koeficijent prigušenja
J	kgm^2	Moment tromosti
t	s	Vrijeme
k_m	-	Konstanta momenta motora
k_g	-	Prijenosni omjer mjenjača
R_a	Ω	Otpor armature motora
r	m	Radius prstenastih kolutova
V_a	V	Ulazni napon motora
MS	-	Model sile
DC	-	Istosmjerni motor
MDC	-	Model koji koristi istosmjerni motor za pobudu
E	-	Pogreška
EC	-	Odstupanje pogreške
NB	-	Negativno i veliko
NM	-	Negativno i srednje
NS	-	Negativno i malo
ZE	-	Nula
PS	-	Pozitivno i malo
PM	-	Pozitivno i srednje
PB	-	Pozitivno i veliko

Popis tablica

Tablica 1. Parametri simulacije.....	9
Tablica 2. Parametri MDC-a.....	11
Tablica 3. Pravila pridruživanja neizrazite regulacije [3]	19

Popis slika

Slika 1. Klasični sustav dvostrukog obrnutog njihala	2
Slika 2. Djelovanje sile na sustav	5
Slika 3. MS model sustava	6
Slika 4. Veza jednađbi gibanja.....	7
Slika 5. Simulink model prve jednađbe MS modela.....	7
Slika 6. Simulink model druge jednađbe MS modela.....	8
Slika 7. Simulink model treće jednađbe MS modela.....	8
Slika 8. Odzivi simulacije MS-a	9
Slika 9. MDC model sustava	10
Slika 10. Odziv MDC-a	12
Slika 11. Ravnotežni položaji dvostrukog obrnutog njihala.....	13
Slika 12. Simulink model prve jednađbe gibanja uz linearnu aproksimaciju	14
Slika 13. Simulink model druge jednađbe gibanja uz linearnu aproksimaciju	15
Slika 14. Simulink model treće jednađbe gibanja uz linearnu aproksimaciju	15
Slika 15. Sustav regulacije dvostrukog obrnutog njihala	17
Slika 16. Fuzzy regulator.....	18
Slika 17. FIS Editor.....	19
Slika 18. Trokutasta funkcija pridruživanja a) ulaza i b) izlaza.....	20
Slika 19. Odzivi simulacije regulacijskog kruga za 1. slučaj početnih uvjeta	21
Slika 20. Odzivi simulacije regulacijskog kruga za 2. slučaj početnih uvjeta	22

Uvod

Gibanje realnih tijela, čija je odlika protežnost u prostoru, predstavlja sustav koji je moguće fizikalno objasniti i, prema tome, matematički formulirati njegovu dinamiku. Djelovanje sile na sustav u različitim točkama i u različitim smjerovima može uzrokovati zamršeno gibanje koje predstavlja istodobnu translaciju i rotaciju oko neke osi.

Primjer sustava s takvim gibanjem je sustav obrnutog njihala. To je složen, nelinearan, nestabilan i teško upravljiv sustav. Praktični problemi koji se mogu simulirati nekom vrstom sustava obrnutog njihala uključuju balansiranje drške ili štapa na dlanu, stabilizaciju čovjeka ili robota u kretanju, upravljanje lansiranja rakete itd. Različitost ovih sustava ogleda se u širokom rasponu dostupnih modela obrnutih njihala. Razlikujemo sustave obrnutih njihala s osnovicom koja se giba po jednom pravcu (klasični sustavi obrnutih njihala) i s osnovicom koja rotira u ravnini (rotacijski sustavi obrnutih njihala), te jednostruke, dvostruke, trostruke i četverostruke sustave obrnutih njihala, koji se međusobno razlikuju prema broju članaka povezanih za bazu. Klasično dvostruko obrnuto njihalo na kolicima predmet je istraživanja ovog rada.

Kao slabo pokretljiv, izuzetno nestabilan, ali ipak upravljiv sustav, klasično dvostruko obrnuto njihalo primjer je sustava koji privlači pozornost za ispitivanje i potvrđivanje linearnih i nelinearnih zakona upravljanja.

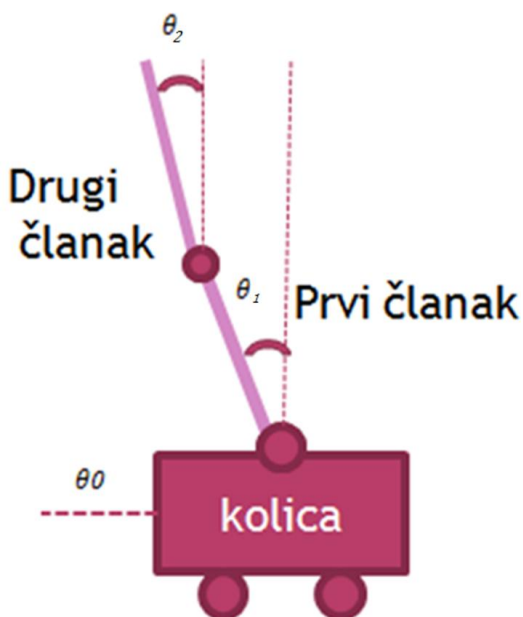
Ovaj rad dokumentira cjelokupni postupak od izrade željenog matematičkog modela do stabilizacije i rezultata analize, a organiziran je kako slijedi. U poglavlju Matematičko modeliranje za razvoj matematičkog modela sustava dvostrukog obrnutog njihala na kolicima korištena je Lagrangeova mehanika. U poglavlju Simulacije isti, razvijeni matematički model, razvijen je i simuliran u MATLAB Simulinku te su analizirani odzivi simulacije. Uz određene aproksimacije, razvijeni matematički model nestabilnog i nelinearnog sustava lineariziran je oko ravnotežne točke u istoimenom poglavlju, Linearizacija. A za stabilizaciju dvostrukog obrnutog njihala, u poglavlju Stabilizacija i rezultati analize korišten je neizraziti regulator.

1. Matematičko modeliranje

Sustav klasičnog dvostrukog obrnutog njihala na kolicima sastoji se od, kao što i sam naziv kaže, dva homogena, kruta članka i kolica. Članci su međusobno povezani pomoću zgloba, a prvi članak pričvršćen je za stabilni dio sustava, tj. kolica. Na sustav u smjeru kolica djeluje sila $F(t)$, koja je ujedno i jedini ulaz u sustav. Djelovanje sile na sustav koristi se za upravljanje 3 stupnja slobode:

1. Položaj kolica $\theta_0(t)$ [m] (kolica imaju mogućnost kretanja po jednoj osi)
 2. Kut prvog članka dvostrukog njihala $\theta_1(t)$ [°] (kut gledan od vertikalne osi)
 3. Kut drugog članka dvostrukog njihala $\theta_2(t)$ [°] (kut gledan od vertikalne osi)
- [1].

Sustav klasičnog dvostrukog obrnutog njihala primjer je SIMO sustava – sustav s jednim ulazom (sila F) i više izlaza (položaj $\theta(t)_0$, kut $\theta_1(t)$, kut $\theta_2(t)$). Na slici *Slika 1.* prikazan je sustav klasičnog dvostrukog obrnutog njihala na kolicima. Pomak kolica, čiji se početni položaj nalazi u točki $(0, y_{CM})$ koordinatnog sustava, označen je kao θ_0 . Oznakama θ_1 i θ_2 prikazani su kutevi za koje je njihalo pomaknuto u odnosu na ravnotežni položaj koji je označen crtkanom linijom.



Slika 1. Klasični sustav dvostrukog obrnutog njihala

Klasično dvostruko obrnuto njihalo je složen, nelinearan, nestabilan i teško upravljiv sustav. Prvo, a time i najbitnije, svojstvo ili osobina sustava je složenost. Složenost ili kompleksnost je svojstvo sustava koje određuje uvjete, veličine i ograničenja koja djeluju na gibanje samog sustava. Složenost sustava se očituje u tome da gibanje pojedinog dijela sustava ovisi o gibanju svih drugih dijelova. Gibanje promatranog sustava ograničeno je vezama, a kada je dinamika sustava ograničena vezama, opis Newtonovim jednadžbama gibanja se uvelike komplicira. Stoga će se za opis dinamičkog gibanja sustava koristiti Lagrangeova mehanika, čija je glavna ideja očuvanje momenta i energije. Lagrange je uspio riješiti problem gibanja tijela bez potrebe za poznavanjem sila reakcije, što uvelike olakšava određivanje dinamičkog modela sustava. Oznaka L predstavlja Lagrangeovu funkciju, odnosno razliku kinetičke (E_K) i potencijalne energije (E_P) [2].

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = u \quad (1)$$

$$L = E_K - E_P \quad (2)$$

Ukupna kinetička i potencijalna energija su jednake zbroju energija po zasebnim komponentama sustava:

$$E_K = E_{Kkol} + E_{K1} + E_{K2} \quad (3)$$

$$E_P = E_{Pkol} + E_{P1} + E_{P2} \quad (4)$$

Kinetička i potencijalna energija kolica [5]:

$$E_{Kkol} = \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^2 m_0 \quad (5)$$

$$E_{Pkol} = 0 \quad (6)$$

Kinetička i potencijalna energija prvog članka [5]:

$$E_{K1} = \frac{1}{2} m_1 \left[(\dot{\theta}_0 + l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1)^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1)^2 \right] + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (7)$$

$$E_{P1} = m_1 g l_1 \cos \theta_1 \quad (8)$$

Kinetička i potencijalna energija drugog članka [5]:

$$E_{K2} = \frac{1}{2}m_2 \left[(\dot{\theta}_0 + L_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos \theta_2)^2 + (L_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \sin \theta_2)^2 \right] + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2}m_2\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}m_2L_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}(m_2l_2^2 + I_2)\dot{\theta}_2^2 + m_2L_1\dot{\theta}_0\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2l_2\dot{\theta}_0\dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + m_2L_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (9)$$

$$E_{P2} = m_2g(L_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \quad (10)$$

Lagrangeove jednadžbe gibanja :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_0} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_0} = F$$

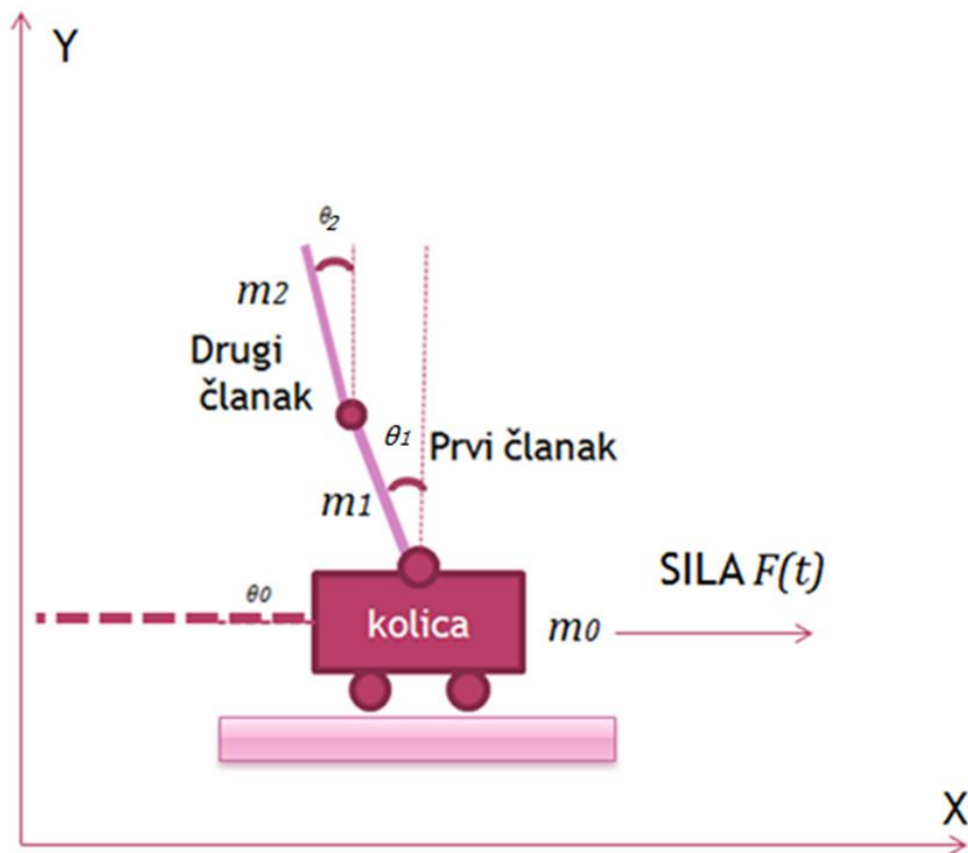
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

Matrični zapis matematičkog modela sustava klasičnog dvostrukog obrnutog njihala :

$$\begin{pmatrix} m_0 + m_1 + m_2 & \left(\frac{1}{2}m_1l_1 + m_2l_1\right) \cos \theta_1 & \frac{1}{2}m_2l_2 \cos \theta_2 \\ \left(\frac{1}{2}m_1l_1 + m_2l_1\right) \cos \theta_1 & J_1 + m_2l_1^2 & \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{1}{2}m_2l_2 \cos \theta_2 & \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & J_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_0 & -\left(\frac{1}{2}m_1l_1 + m_2l_1\right) \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 & \frac{1}{2}m_2l_2 \cos \theta_2 \\ \frac{1}{2}m_1l_1 \cos \theta_1 & \delta_1 + \delta_2 & -\frac{1}{2}m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \delta_2 \\ \frac{1}{2}m_2l_2 \cos \theta_2 & -\frac{1}{2}m_2l_1l_2\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \delta_2 & \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right) gl_1 \sin \theta_1 \\ -\frac{1}{2}m_2gl_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

U izrazu (11), u matričnom zapisu jednadžbi gibanja, uzeti su u obzir: koeficijent trenja kolica o tračnice δ_0 , konstante prigušenja spojeva njihala δ_1 i δ_2 i momenti tromosti njihala [1]. $F(t)$ je sila kojom se djeluje na kolica. Smjer djelovanja sile prikazan je na slici Slika 2. Prema označenom smjeru, kolica se mogu gibati u smjeru osi x naprijed – natrag, bez mogućnosti skretanja u smjeru osi z . Do pomaka kolica također može doći i uslijed gibanja gornje mase, čak i ukoliko ne djeluje vanjska sila $F(t)$.



Slika 2. Djelovanje sile na sustav

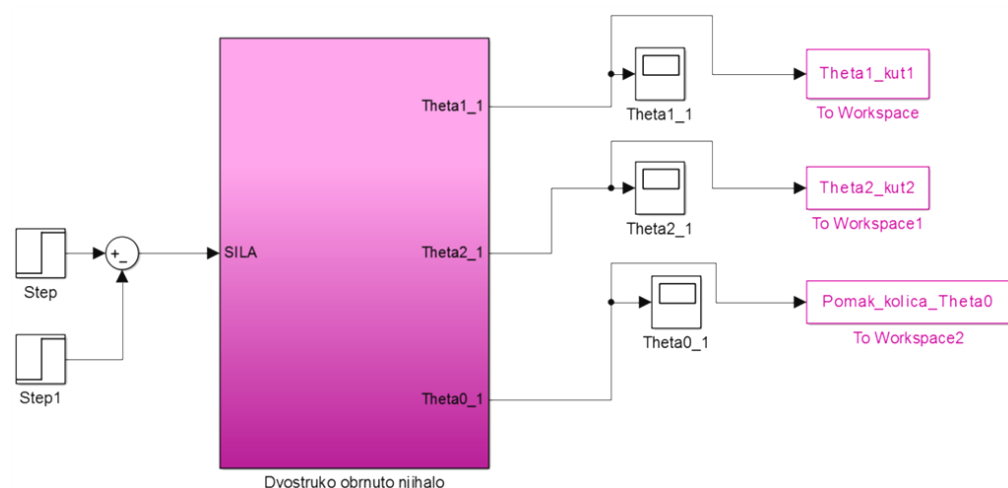
2. Simulacija

Za model sustava klasičnog dvostrukog obrnutog njihala opisanog izrazom (11), u ovom poglavlju bit će prikazan prikladan simulink model u MATLAB-u te odzivi simulacije navedenog modela. Pobudu sustava, odnosno silu $F(t)$, čini razlika skokovitih funkcija (step funkcija) u trajanju od 1 [s]. Model sustava koji za ulaz ima djelovanje sile kao razlike skokovitih funkcija u daljnjem radu bit će predstavljen kao model sile (MS). Osim djelovanja MS-a, pokazat će se i ishod uvrštavanja drugog oblika pobude u izraz (11). Kao drugi oblik pobude $F(t)$ korišten je izraz:

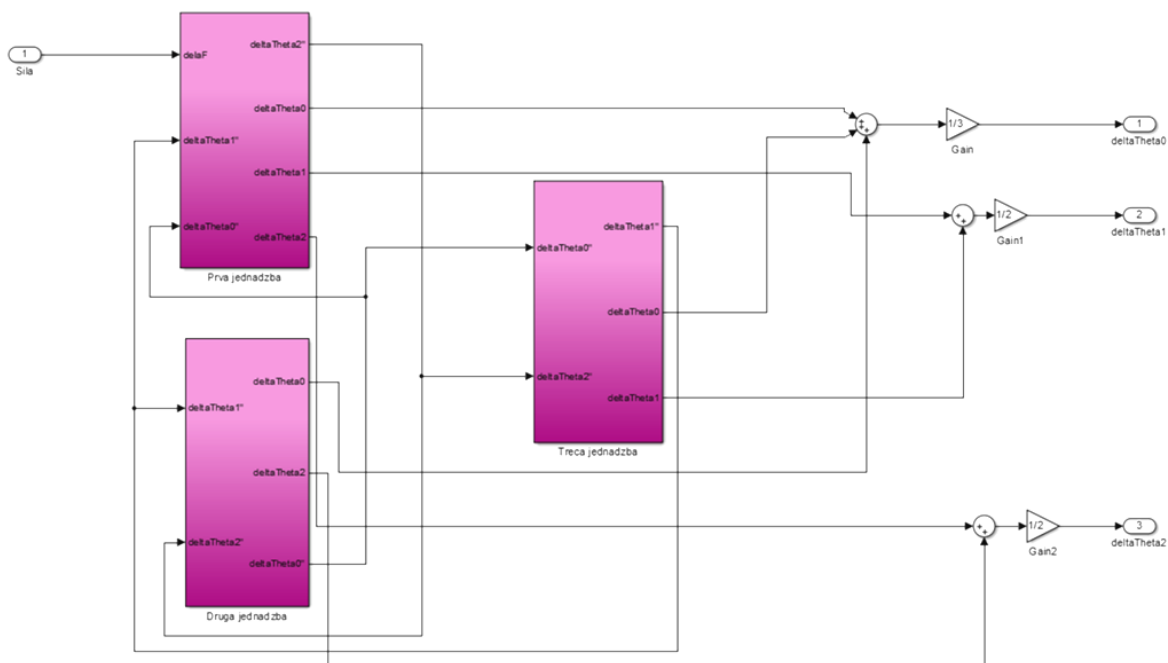
$$F(t) = \frac{k_m k_g}{R_a r} V_a(t) - \frac{k_m^2 k_g^2}{R_a r^2} \dot{\theta}_0(t) . \quad (12)$$

Izraz (12) predstavlja DC motor koji će biti aktuatorski mehanizam za pokretanje kolica u ovom slučaju [1]. Model sustava koji koristi DC motor bit će predstavljen kao MDC model sustava.

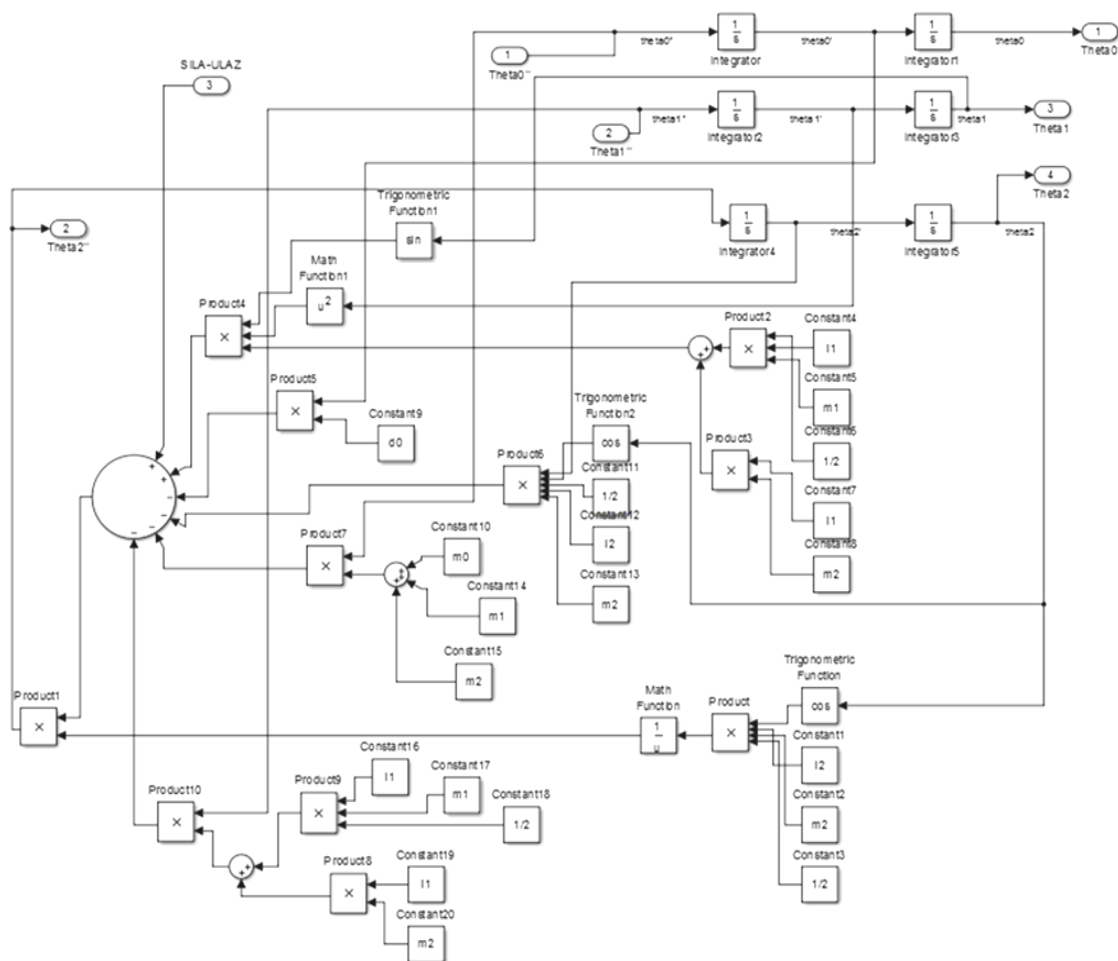
Na slikama *Slika 3.* – *Slika 7.* prikazan je simulink model za MS klasičnog sustava dvostrukog obrnutog njihala.



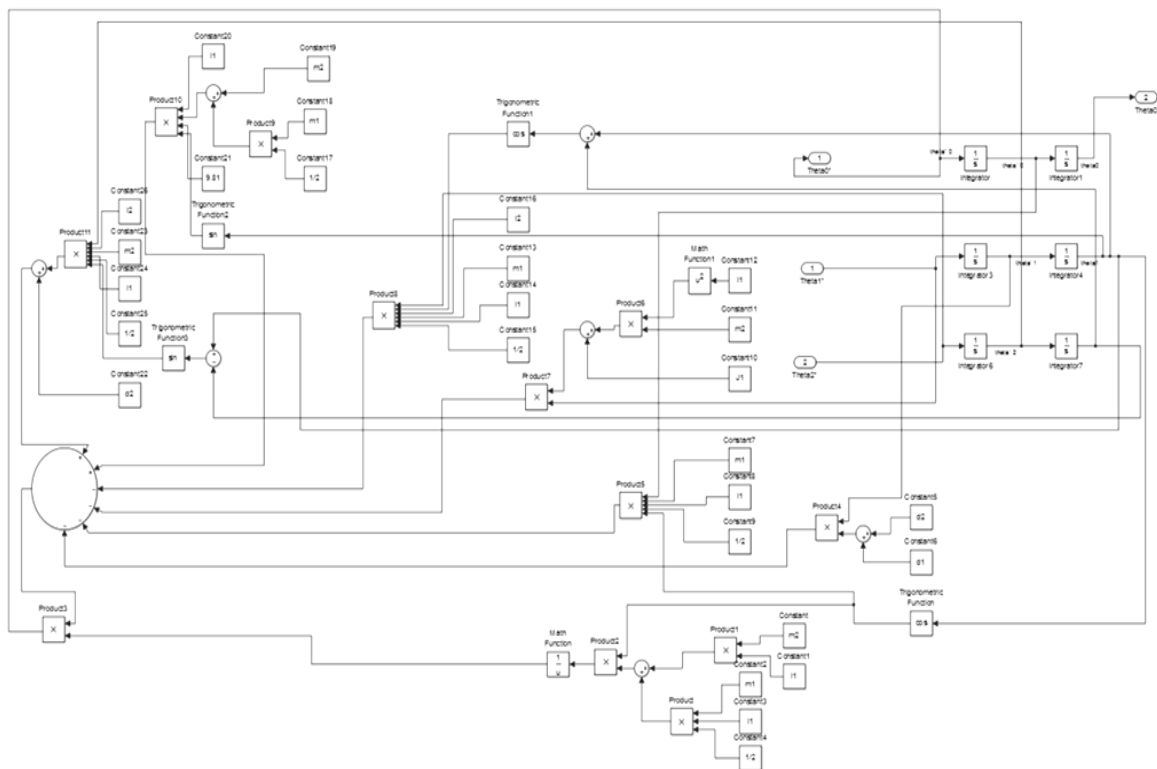
Slika 3. MS model sustava



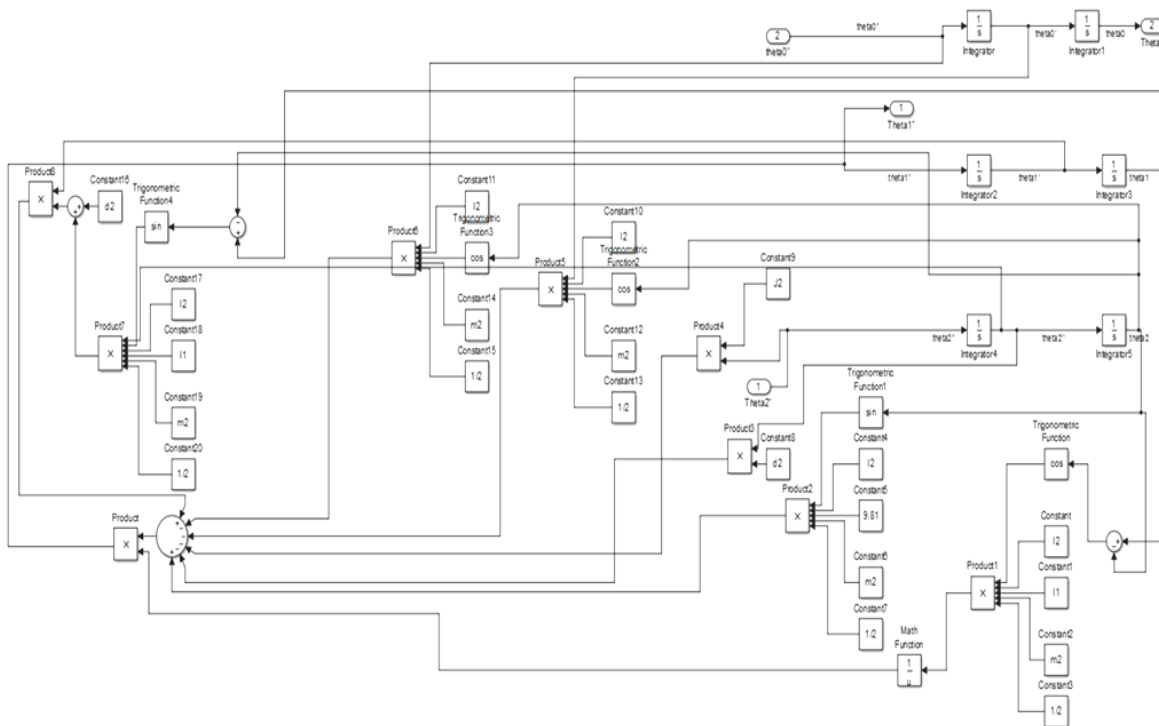
Slika 4. Veza jednađbi gibanja



Slika 5. Simulink model prve jednađbe MS modela



Slika 6. Simulink model druge jednadžbe MS modela



Slika 7. Simulink model treće jednadžbe MS modela

Simulacijom prikazanog MS modela u MATLAB-u dobiveni su odzivi položaja kolica θ_0 , promjene kuta prvog članka θ_1 te promjene kuta drugog članka θ_2 koji su prikazani na slici *Slika 8*.

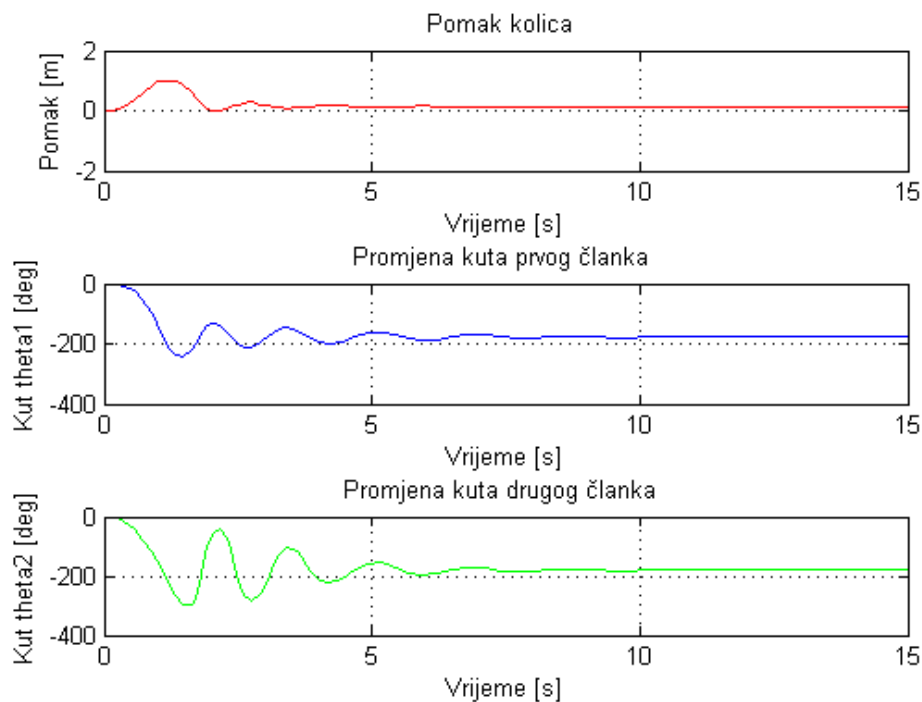
Iznosi parametara simulacije MS-a izabrani su kako slijedi:

Tablica 1. Parametri simulacije

masa	duljina	Koeficijenti trenja
$m_0=0.3$ [kg]	-----	$\delta_0=0.3$ [kgs ⁻¹]
$m_1=0.275$ [kg]	$l_1=0.5$ [m]	$\delta_1=0.1$ [kgm ² s ⁻¹]
$m_2=0.275$ [kg]	$l_2=0.5$ [m]	$\delta_2=0.1$ [kgm ² s ⁻¹]

Za pobudu se uzima sila $F(t)$ iznosa amplitude 1 [N]. Djelovanje sile počinje u trenutku $t = 0$ [s] i traje 1 [s].

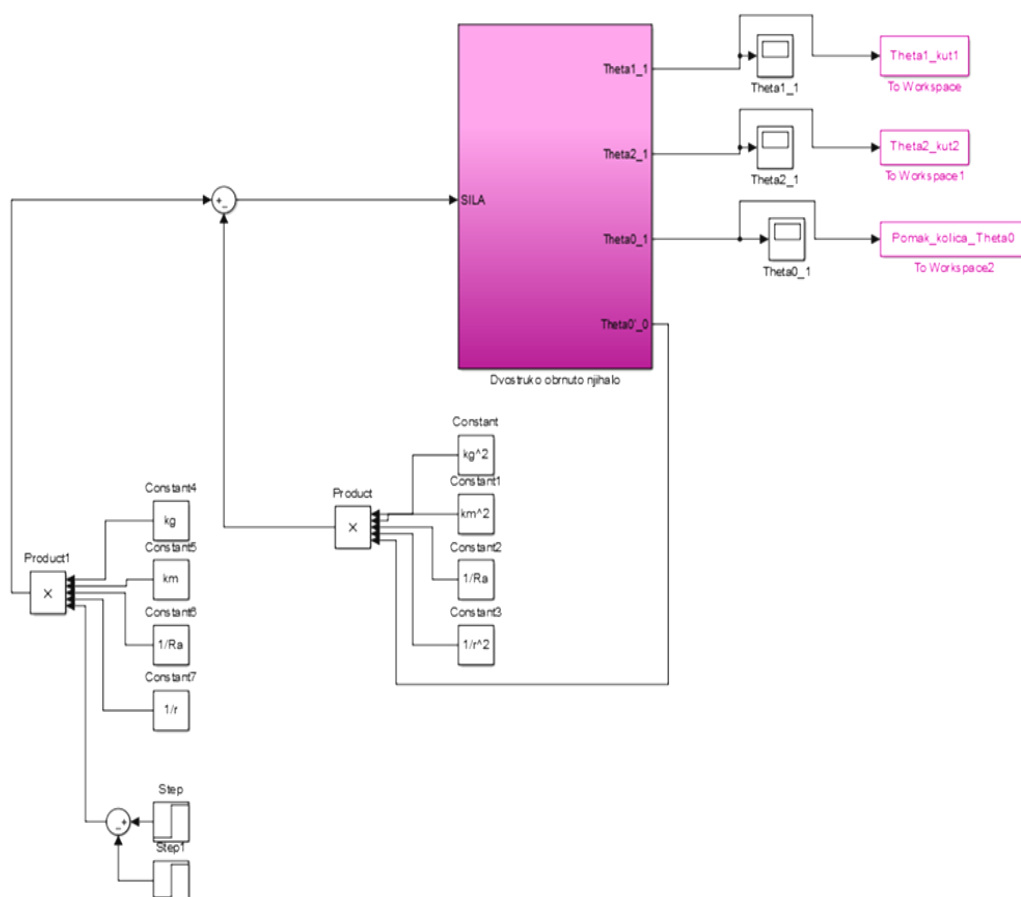
Isto tako, potrebno je naglasiti da je odziv prikazan slikom *Slika 8*. odziv simulacije sustava u otvorenoj petlji, tj. bez djelovanja regulatora.



Slika 8. Odzivi simulacije MS-a

Razumno ponašanje odziva simulacije MS-a u otvorenoj petlji, odnosno prigušenje oscilacija prijelaznog stanja, dosezanje stabilnog ravnotežnog položaja sustava s njimalima okrenutim prema dolje, vidljivi povratni udar njihala na bazu, znači da se simulacijski model može smatrati dovoljno točnim da služi kao pouzdan testni sustav za provjeru linearnih i nelinearnih upravljačkih algoritama [1].

Kao što je slučaj sa sustavima dvostrukih obrnutih njihala, praktična upotreba MS-a klasičnog dvostrukog obrnutog njihala ograničena je samo na simulacijsko okruženje zbog nemogućnosti ručnog generiranja sile koja će stabilizirati njihalo u odgovarajućem izabranom položaju [1]. Zbog toga potrebno je povezati električni motor (DC motor) sa sustavom obrnutog njihala da djeluje kao upravljački mehanizam koji će proizvesti silu za pokretanje kolica i njihala. Implementacijom izraza (12) kao signala pobude sustava klasičnog dvostrukog obrnutog njihala dobiva se MDC model prikazan slikom *Slika 9*. Veze između pojedinih jednadžbi gibanja i simulink modeli jednadžbi gibanja ostali su nepromijenjeni.



Slika 9. MDC model sustava

Izraz (12) opisuju parametri:

1. $V_a(t)$ - ulazni napon motora,
2. k_m - konstanta momenta motora jednaka EMF konstanti,
3. k_g - prijenosni omjer mjenjača,
4. R_a - otpor armature motora,
5. r - radijus prstenastih kolutova koji su postavljeni na osovinu i pretvaraju moment, koji je proizveo motor, u linearnu silu upravljanja $F(t)$.

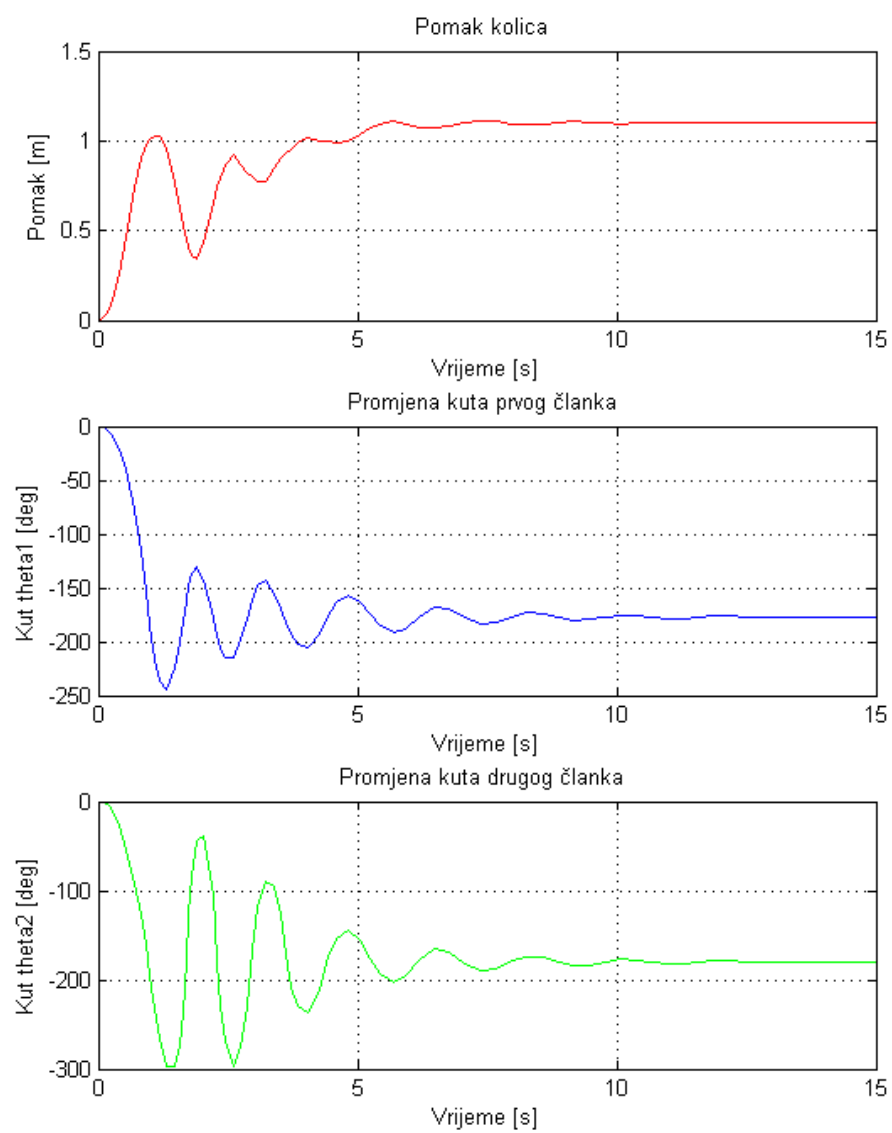
Parametri DC motora (k_m , k_g , R_a , r) detaljnije su objašnjeni u [1]. Iznosi parametara DC motora korišteni u simulaciji MDC-a prikazani su u tablici *Tablica 2*. Za simulacijske parametre sustava, tj. mase, duljine i koeficijenti trenja, koriste se isti parametri kao i u slučaju MS-a .

Tablica 2. Parametri MDC-a

Parametar	Vrijednost
k_g	1.5
k_m	0.45
R_a	4.03
r	0.5

Za pobudu se uzima napon $V_a(t)$ u obliku skokovite funkcije trajanja 1 [s] i amplitude 5 [V]. Djelovanje napona počinje u trenutku $t = 0$ [s].

Simulacijom prikazanog MDC-a u MATLAB-u dobiveni su odzivi položaja kolica θ_0 , promjene kuta prvog članka θ_1 te promjene kuta drugog članka θ_2 koji su prikazani na slici *Slika 10*.

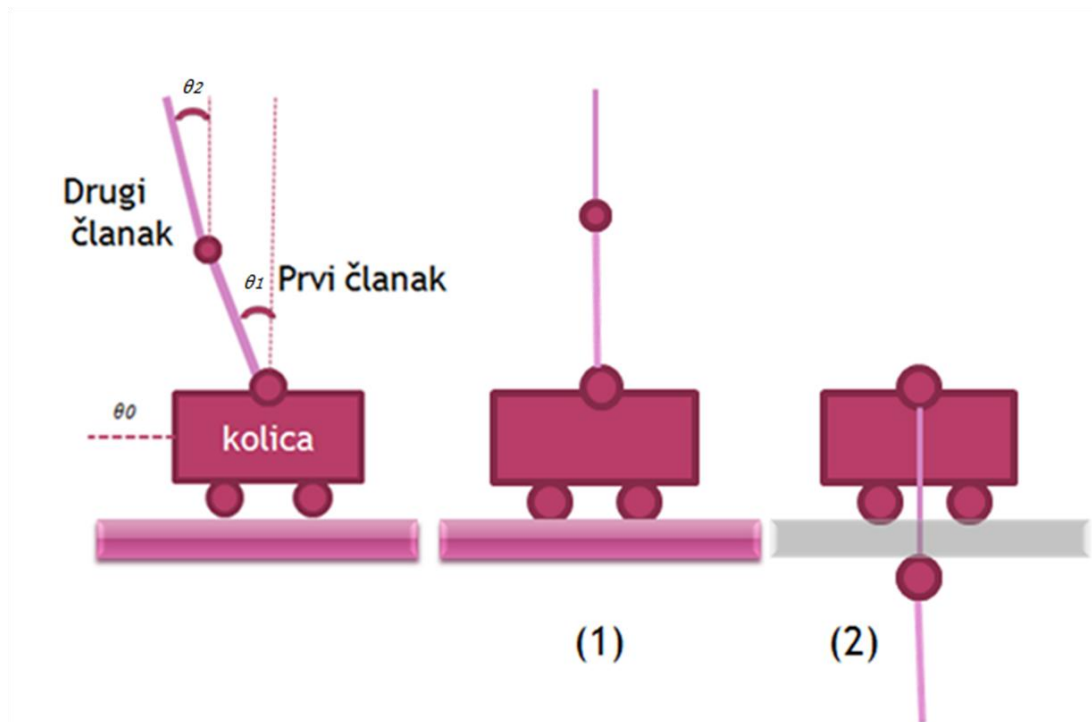


Slika 10. Odziv MDC-a

3. Linearna aproksimacija

Sustav obrnutog dvostrukog njihala je nelinearan, složen i nestabilan sustav. Spomenuti sustav moguće je zadovoljavajuće opisati, odnosno aproksimirati, u ograničenom radnom području pomoću linearnog matematičkog modela. Linearizacija se može primijeniti na matematičke modele prikazane u obliku unutarnjih modela ili ulazno-izlaznih modela, što je oblik linearizacije koja će biti provedena u ovom radu.

Na slici *Slika 11.* prikazana su dva ravnotežna stanja sustava dvostrukog obrnutog njihala na kolicima. Stabilno ravnotežno stanje označeno je brojem 2, a nestabilno ravnotežno stanje brojem 1. Postupak linearizacije proveden je za dovoljno mala odstupanja oko nestabilnog ravnotežnog stanja.

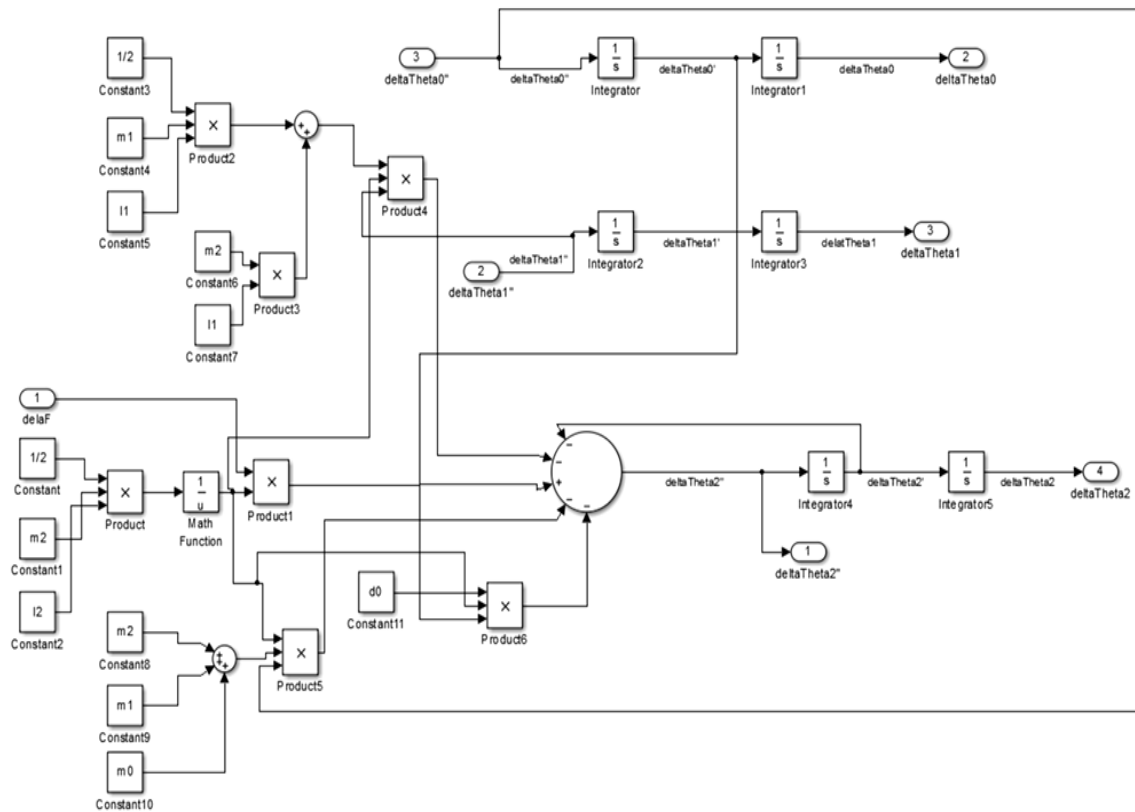


Slika 11. Ravnotežni položaji dvostrukog obrnutog njihala

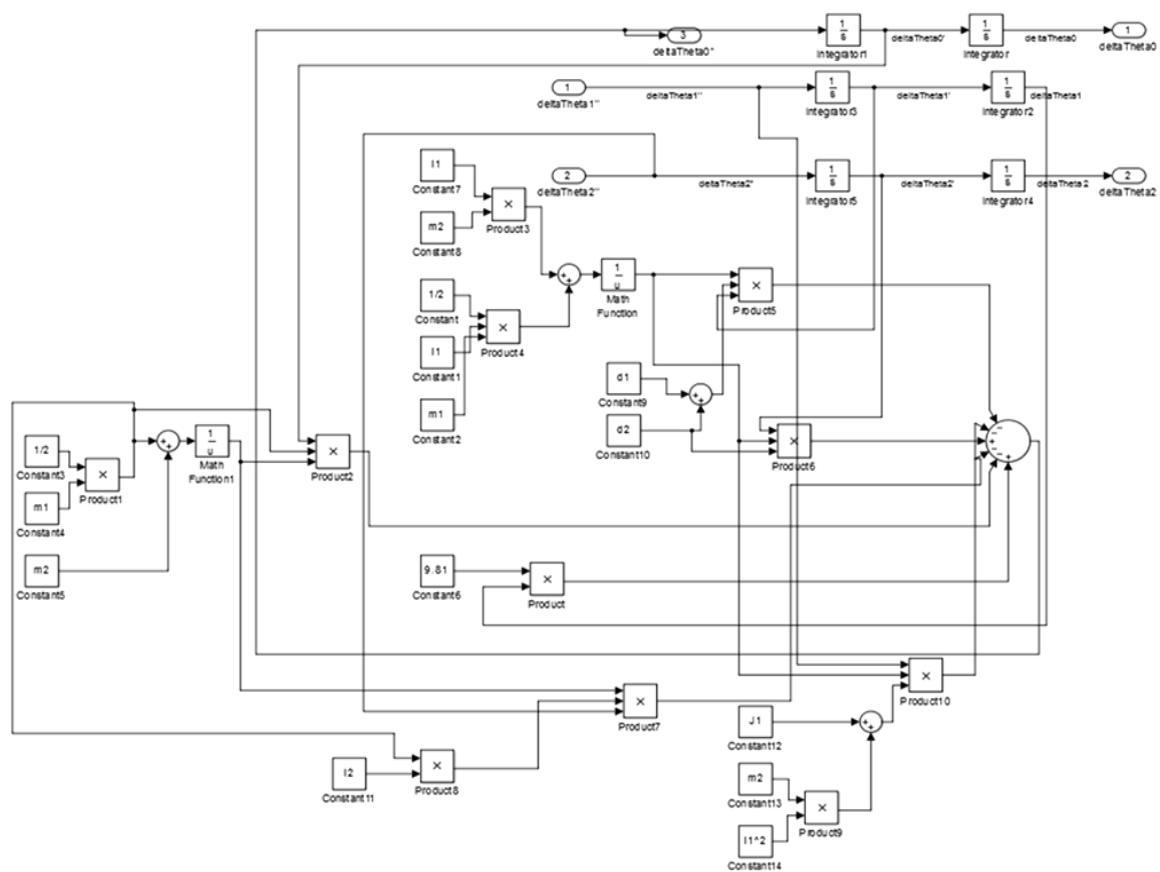
U blizini ravnotežnog položaja označenom brojem 2 vrijedi da su kutevi θ_1 i θ_2 približno jednaki 0 stoga je moguća sljedeća linearna aproksimacija nelinearnog modela:

$$\sin \theta_1 \sim \theta_1, \quad \sin \theta_2 \sim \theta_2, \quad \cos \theta_1 \cong 1, \quad \cos \theta_2 \cong 1, \quad \dot{\theta}_1 = 0, \quad \dot{\theta}_2 = 0.$$

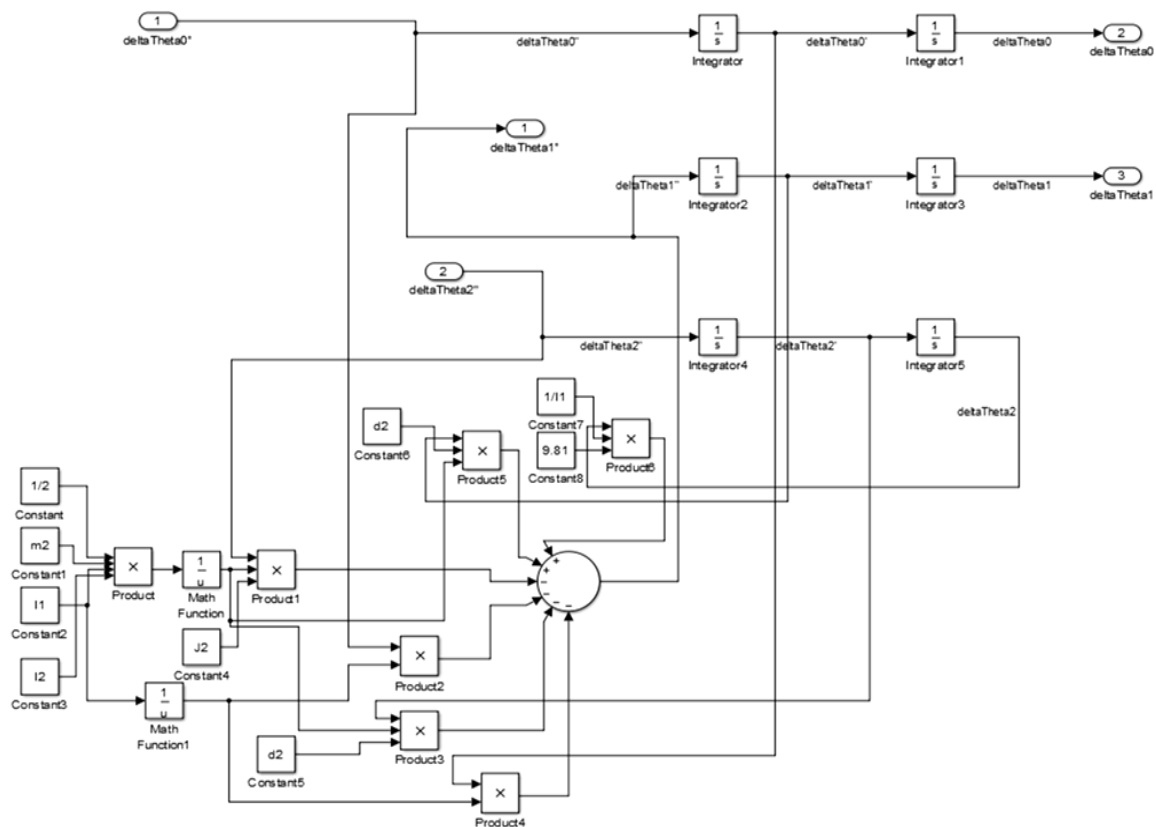
Na slikama *Slika 12.* – *Slika 14.* prikazani su simulink modeli jednadžbi gibanja početnog nelinearnog sustava uz upotrebu prije navedenih aproksimacija. Navedene aproksimacije su uveliko pojednostavile simulink sheme te tako omogućile implementaciju regulatora.



Slika 12. Simulink model prve jednadžbe gibanja uz linearnu aproksimaciju



Slika 13. Simulink model druge jednadžbe gibanja uz linearnu aproksimaciju



Slika 14. Simulink model treće jednadžbe gibanja uz linearnu aproksimaciju

4. Stabilizacija i rezultati analize

Sustav dvostrukog obrnutog njihala je, kao što je već spomenuto, viševarijabilni, nelinearni, nestabilni te neminimalno fazni sustav. Analiziranje tog sustava ne daje samo teorijske spoznaje nego posjeduje i važnu inženjersku primjenu u praksi. Za regulaciju sustava dvostrukog obrnutog njihala glavna upravljačka metoda uključuje neizrazitu logiku [3]. Za regulaciju dvostrukog obrnutog njihala pomoću neizrazite logike istraživanje je usmjereno na rješavanje problema "pravila eksplozije" [3]. Neki istraživači su krenuli od neizrazite logike predstavljajući svoje izmjene, dok su drugi pokušali kombinirati neizrazitu logiku i neuronske mreže kako bi pojednostavili broj upravljačkih pravila [3].

4.1. Prikaz modela dvostrukog obrnutog njihala u prostoru stanja

Matematički model dvostrukog obrnutog njihala izveden je u poglavlju Matematičko modeliranje korištenjem Lagrangeove mehanike za opis dinamičkog gibanja sustava. Matematički model nelinearnog, nestabilnog sustava dvostrukog obrnutog njihala lineariziran je oko ravnotežne točke u poglavlju Linearizacija te je na osnovu tog lineariziranog modela izveden model u prostoru stanja čiji je vektor stanja:

$$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]^T,$$

gdje su:

$$x_1 = \theta_0, x_2 = \theta_1, x_3 = \theta_2, x_4 = \dot{\theta}_0, x_5 = \dot{\theta}_1, x_6 = \dot{\theta}_2.$$

Vremenski promjenljiv linearni sustav u općem obliku prostora stanja opisuje se na sljedeći način:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)u(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)u(t) \end{cases}$$

gdje su matrice A , B , C i D :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70.1505 & -20.0972 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -35.0752 & 34.5486 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

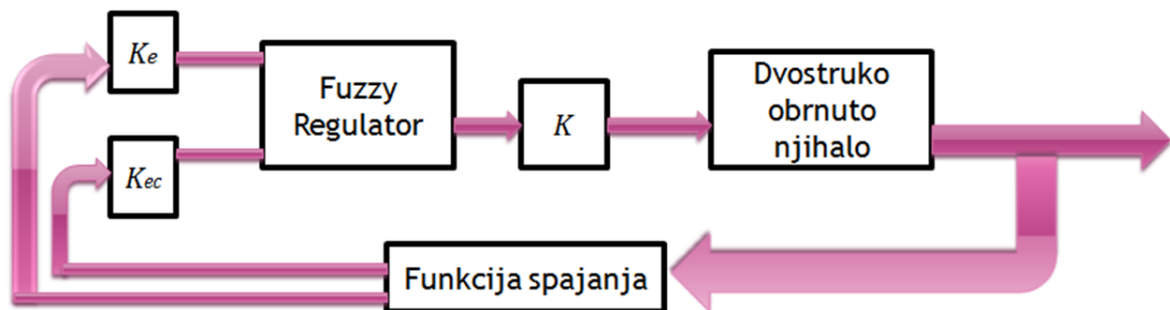
$$B = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 5.1075 \ -0.0537]^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T.$$

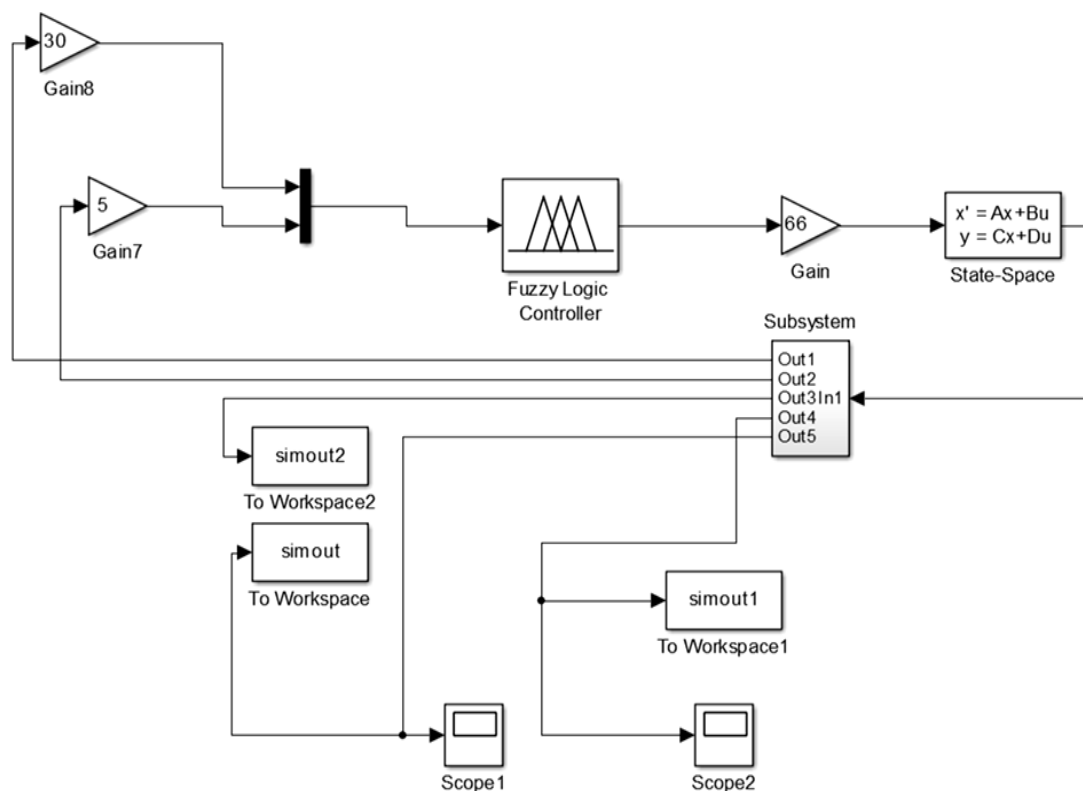
4.2. Neizraziti regulator dvostrukog obrnutog njihala

Korištenjem funkcije spajanja, vektor izlaznih varijabli sustava i njihovih derivacija sintetiziran je, odnosno sažet, kao vektor s dvije dimenzije kojeg čine pogreška i odstupanje pogreške [3]. Pomoću teorije neizrazite logike razvijen je neizraziti regulator sustava dvostrukog obrnutog njihala u MATLAB-u. Dobiveni rezultati simulacije takvog regulacijskog kruga pokazali su izvodljivost primjenjene metode za regulaciju nestabilnog sustava. Sustav regulacije dvostrukog obrnutog njihala prikazan je na slici *Slika 15*.



Slika 15. Sustav regulacije dvostrukog obrnutog njihala

Funkcija spajanja zajedno sa neizrazitim regulatorom čini upravljački sklop. Upravljački sklop od sustava dvostrukog obrnutog njihala može dobiti šest podataka, koji ujedno čine i stanje sustava [4]. Temeljem tih podataka zadaća upravljačkog sustava je prilagoditi silu koja će djelovati na kolica, a u svrhu stabilizacije njihala u okomitom ravnotežnom nestabilnom položaju. Neizraziti regulator koji je korišten za regulaciju sustava dvostrukog obrnutog njihala u MATLAB-u prikazan je na slikama *Slika 16.* I *Slika 17.* Prikazana konfiguracija regulacijskog kruga s neizrazitim regulatorom predstavlja zatvorenu petlju pomoću koje se, dobivanjem informacije o trenutnom položaju sustava, generira novi ulaz za sustav, odnosno sila. Temeljem tog novog ulaza sustav se dovodi do potencijalne promjene stanja i time se zatvara regulacijski krug. Funkcije pridruživanja su trokutaste i prikazane su na slici *Slika 18.* Pogreška i odstupanje pogreške mogu poprimiti 7 različitih vrijednosti iz kojih je dobiveno ukupno 49 pravila koja su sažeto prikazana tablicom *Tablica 3.* [3].

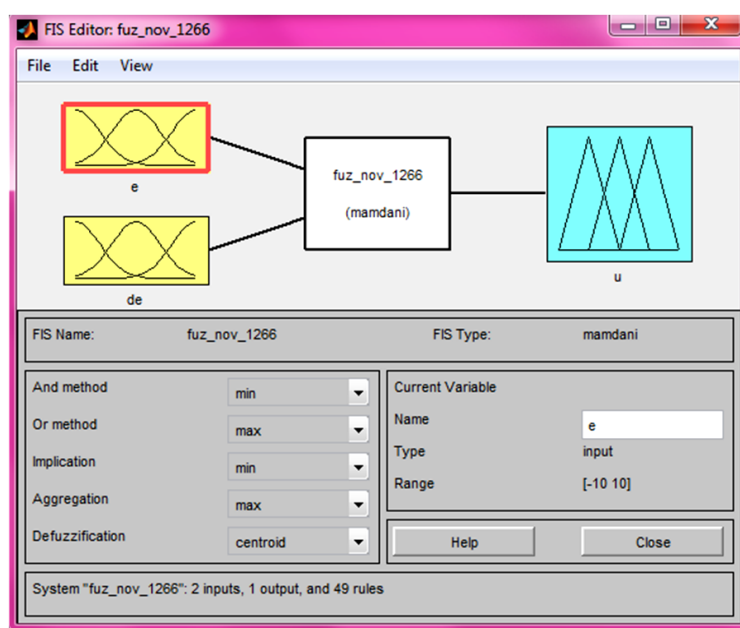


Slika 16. Fuzzy regulator

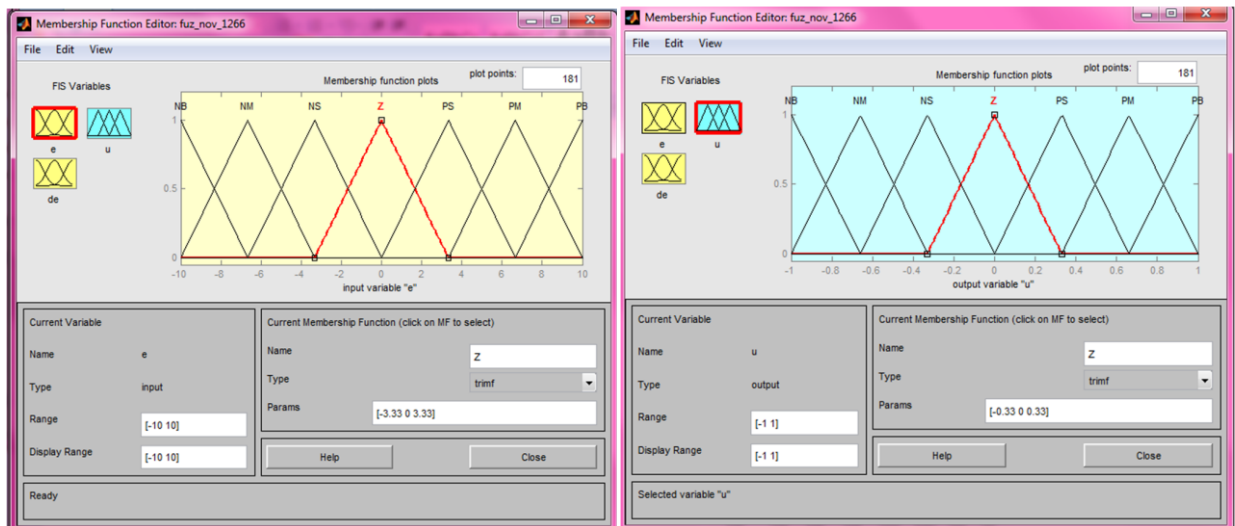
Tablica 3. Pravila pridruživanja neizrazite regulacije [3]

	EC	NB	NM	NS	ZE	PS	PM	PB
E								
NB		NB	NB	NB	NM	NM	NS	ZE
NM		NB	NB	NM	NM	NS	ZE	PS
NS		NB	NM	NM	NS	ZE	PS	PM
ZE		NM	NM	NS	ZE	PS	PM	PM
PS		NM	NS	ZE	PS	PM	PM	PB
PM		NS	ZE	PS	PM	PM	PB	PB
PB		ZE	PS	PM	PM	PB	PB	PB

U tablici pravila pridruživanja (*Tablica 3.*) primjetna je simetričnost, u određenom smislu. U gornjem lijevom uglu tablice opisano je pravilo kod kojeg se njihalo nalazi s lijeve strane od vertikalne osi i pada lijevo, a u donjem desnom uglu opisano je pravilo kod kojeg se njihalo nalazi s desne strane od vertikalne osi i pada desno. Zaključak koji treba poduzeti za obje situacije je isti u smislu iznosa sile ali suprotan u smislu smjera iste (NB i PB). Na sličan način može se uočiti simetričnost i kod ostalih 47 situacija te zaključivanjem odrediti kakvom je silom potrebno djelovati na sustav.



Slika 17. FIS Editor



Slika 18. Trokutasta funkcija pridruživanja a) ulaza i b) izlaza

Stabilnost dvostrukog obrnutog njihala osobito je osjetljiva na početne položaje kuteva θ_{10} i θ_{20} . U ovom radu analizirana su sljedeća dva slučaja [3]:

1. Početni uvjeti simulacije jednaki su:

$$\begin{aligned}\theta_{00} &= 0.1 [m], \\ \theta_{10} &= 0.1 [rad] = 5.7 [^\circ], \\ \theta_{20} &= -0.1 [rad] = -5.7 [^\circ]\end{aligned}$$

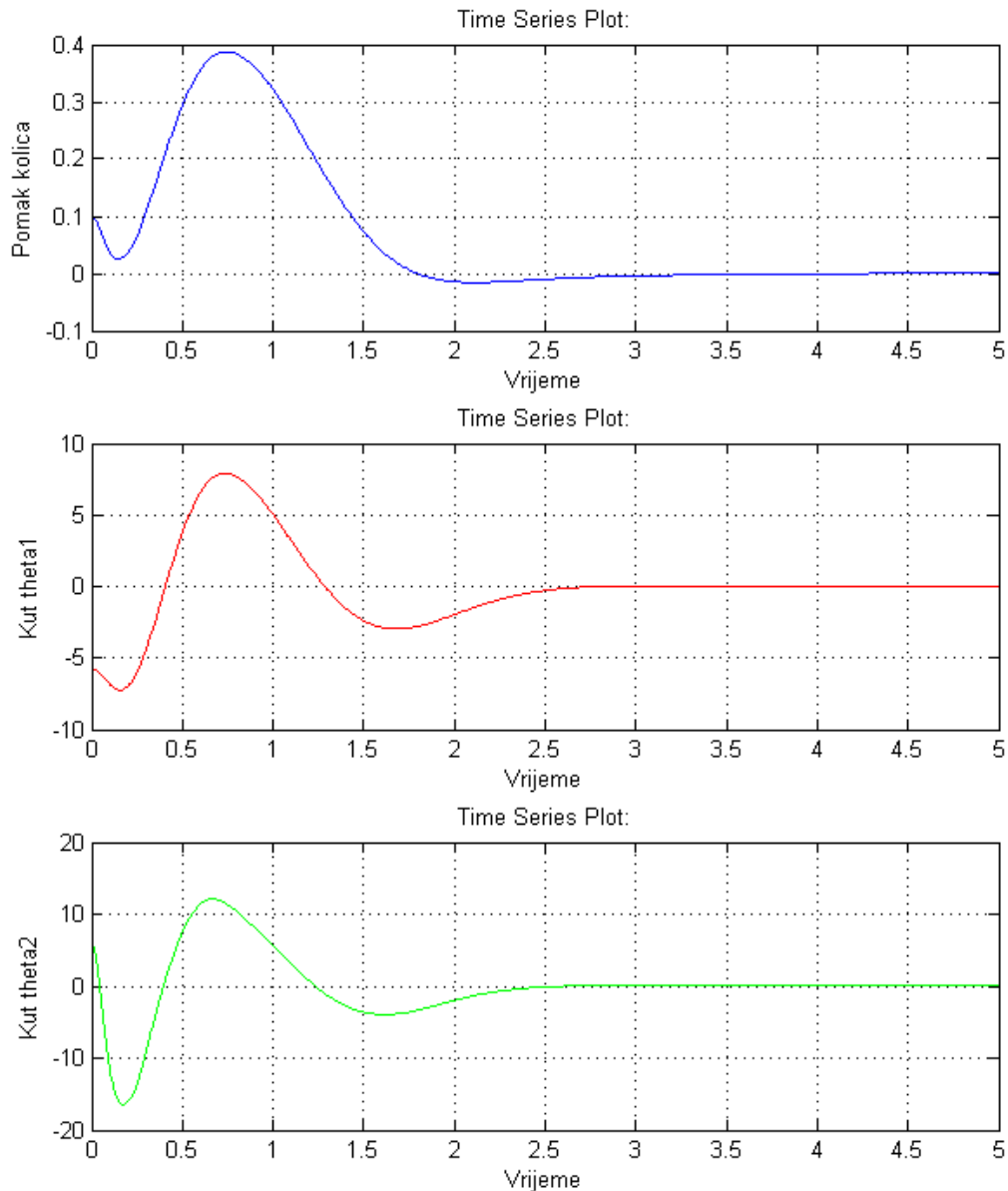
2. Početni uvjeti simulacije jednaki su:

$$\begin{aligned}\theta_{00} &= 0.1 [m], \\ \theta_{10} &= \theta_{20} = 0.1 [rad] = 5.7 [^\circ]\end{aligned}$$

Vrijeme koraka simulacije je 5 [ms], a trajanje simulacije 5 [s].

Iz odziva simulacije prikazanih na slici Slika 19. vidljiva su sljedeća svojstva stabilizacije za prvi slučaj početnih uvjeta. Kolica su imala maksimalni pomak 40 [cm] od ravnotežnog položaja. Kut prvog članka θ_1 prvo poprima negativnije vrijednosti od početne što se vidi kao funkcija podbačaja, a potom poprima maksimalnu vrijednost od oko 7 [°] nakon čega se pozicionira u ravnotežni položaj. Kut drugog članka θ_2 ima odziv sličan odzivu prvog kuta uz veća odsupanja minimalnog i maksimalnog položaja prema ravnotežnom položaju. Minimalna

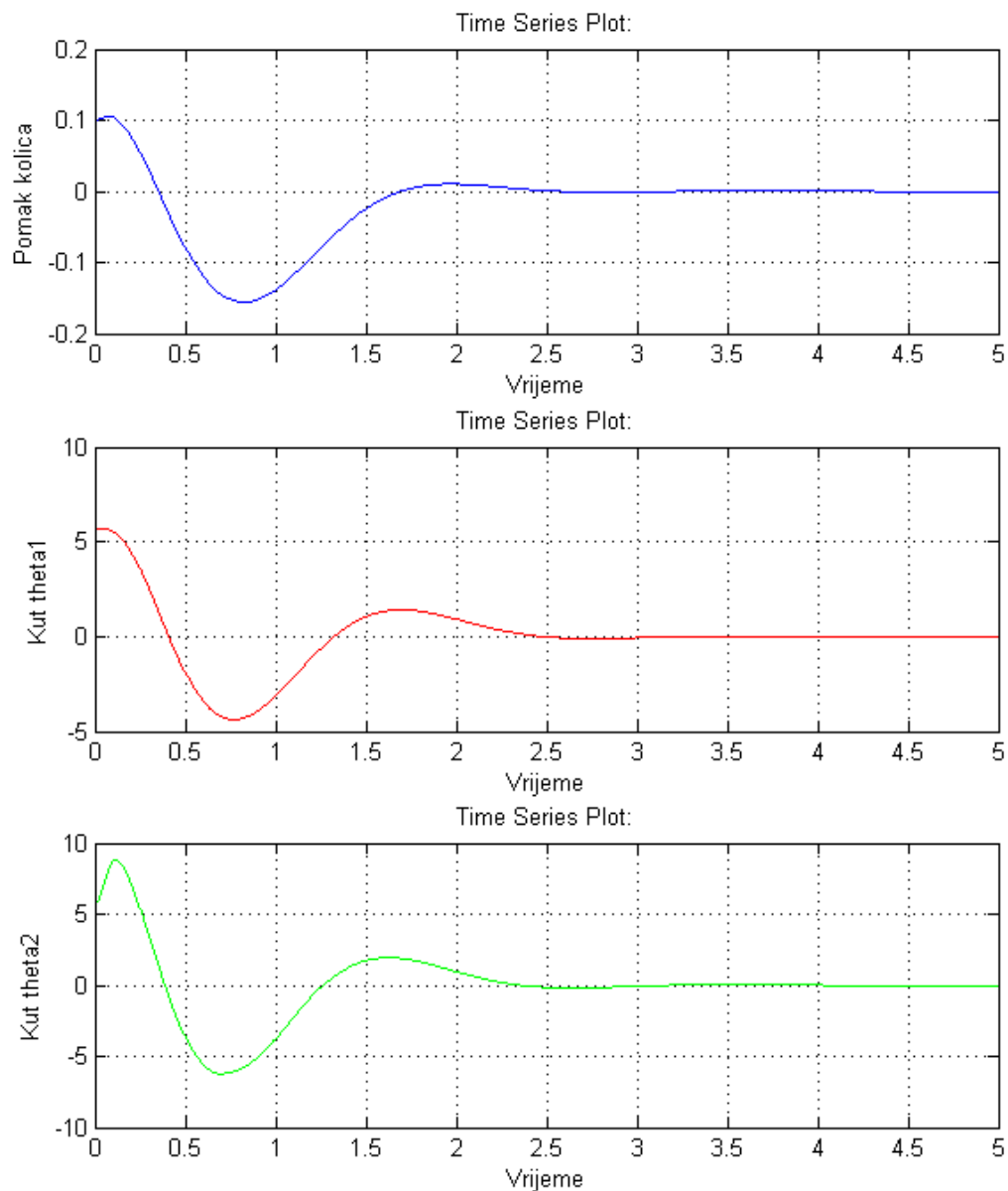
vrijednost drugog kuta je oko -15 [°], a maksimalna vrijednost je oko 12 [°]. Iz simulacije vidljivo je, također, da se sustav ustabilio unutar 3 [s].



Slika 19. Odzivi simulacije regulacijskog kruga za 1. slučaj početnih uvjeta

Iz odziva simulacije prikazanih na slici *Slika 20.* vidljiva su sljedeća svojstva stabilizacije za drugi slučaj početnih uvjeta. Kolica su imala maksimalni pomak 16 [cm] od ravnotežnog položaja. Kut prvog članka θ_1 prvo poprima pozitivnije vrijednosti od početne što se vidi kao kratkotrajno nadvišenje, a potom poprima

minimalnu vrijednost od oko -4 [°] nakon čega se pozicionira u ravnotežni položaj. Kut drugog članka θ_2 ima odziv sličan odzivu prvog kuta uz veća odsupanja minimalnog i maksimalnog položaja prema ravnotežnom položaju. Minimalna vrijednost drugog kuta je oko -6 [°], a maksimalna vrijednost je oko 9 [°]. Iz simulacije vidljivo je, također, da se sustav ustabilio unutar 3 [s] kao i u prethodnom slučaju za druge početne uvjete.



Slika 20. Odzivi simulacije regulacijskog kruga za 2. slučaj početnih uvjeta

Zaključak

U ovom završnom radu modeliran je sustav dvostrukog obrnutog njihala na kolicima. Analizirani model dvostrukog obrnutog njihala promatran je kao sustav koji se sastoji od idealnih krutih članaka i kolica na koja djeluje vanjska sila. Praktična upotreba MS-a klasičnog dvostrukog obrnutog njihala ograničena je samo na simulacijsko okruženje zbog nemogućnosti ručnog generiranja sile koja bi stabilizirala njihalo u odgovarajućem položaju. Zbog toga je bilo potrebno povezati električni istosmjerni motor sa sustavom kako bi djelovao kao upravljački mehanizam za pokretanje kolica. Utjecaji trenja dodatnih fiksnih dijelova prema pomičnim dijelovima uzeti su u obzir kroz konstante u konačnim jednadžbama gibanja. Zbog složenosti direktnog razvoja matematičkog modela, jednadžbe gibanja prvenstveno su izvedene za zasebne dijelove promatranog sustava.

Matematički model temeljen na Lagrangeovoj mehanici objekt je regulacije. Uz prikladni neizraziti regulator, simulacijski rezultati pokazuju kako neizrazita regulacijska metoda, primijenjena na sustavu dvostrukog obrnutog njihala, ima dobre i zadovoljavajuće karakteristike odziva te ista potvrđuje izvedivost algoritma.

Rafaela Vujević

Literatura

- [1] Jadlovksa Slavka, Sarnovsky Jan, Classical Double Inverted Pendulum - a Complex Overview of a System, 01/2012., *Classical Double Inverted Pendulum - a Complex Overview of a System*,
http://www.researchgate.net/publication/267244664_Classical_Double_Inverted_Pendulum_a_Complex_Overview_of_a_System, 10.04.2015.
- [2] Baličević V.,B.M., Model samostabilizirajućeg vozila na jednom kotaču. magistarski rad predan za rektorovu nagradu, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 2011.,
- [3] Lin Wang, Fuzzy control of a double inverted pendulum based on information fusion, 2010. , *Fuzzy control of a double inverted pendulum based on information fusion*
http://www.researchgate.net/publication/224172755_Fuzzy_control_of_a_double_inverted_pendulum_based_on_information_fusion , 10.04.2015.
- [4] Čupić M., Dalbelo Bašić B., Golub M. Neizrazito, evolucijsko i neuroračunarstvo, 2013., Zagreb,
- [5] Alexander Bogdanov, Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart,12/2004., *Optimal Control of a Double Inverted Pendulum on a Cart*
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.78.6105>,
01.06.2015.

Sažetak

Sustav dvostrukog obrnutog njihala je tipični brzi, viševarijabilni, nelinearni, nestabilni i neminimalno fazni sustav. Cilj ovoga završnog rada je izvođenje kontinuiranog matematičkog modela za spomenuti sustav dvostrukog obrnutog njihala na kolicima čijim se pokretanjem ostvaruje stabilizacija njihala. Matematički model sustava, opisan pomoću Lagrangeove mehanike, implementiran je u MATLAB Simulinku te potom lineariziran oko nestabilne ravnotežne točke. Za linearizirani model, implementiran je neizraziti regulator koji stabilizira sustav oko nestabilne ravnotežne točke .

Ključne riječi: dvostruko obrnuto njihalo, matematički model, Lagrangeova mehanika, linearizacija, stabilizacija, regulator.

Summary

Inverted pendulum system is a typical rapid, multivariable, nonlinear, unstable and non-minimum phase system. The aim of this final paper is to derive a continuous mathematical model for the above-mentioned double inverted pendulum system on a cart whose activation stabilizes the pendulum. The mathematical model of the system, described through Lagrange mechanics, has been implemented in MATLAB Simulink and then linearized around unstable equilibrium point. As for linear model of the system, a fuzzy controller has been implemented to stabilize the system around unstable equilibrium point.

Key words: double inverted pendulum system, mathematical model, Lagrange mechanics, linearization, stabilization, controller